

多智能体系统快速有限时间平均一致性协议研究

王晓波¹, 邢建春¹, 李决龙^{1, 2}, 王荣浩¹

(1 解放军理工大学 国防工程学院, 江苏 南京 210007; 2 海军海防工程研究中心, 北京 100841)

摘 要: 针对多智能体系统, 本文提出了一种新型的有限时间平均一致性协议. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 证明了系统在该协议控制下的稳定性, 并得出了系统收敛时间的上限. 通过与典型有限时间一致性协议的控制输入进行对比, 得出该协议可以有效提高系统的收敛速度. 最后, 应用仿真实例对本文结论进行了验证.

关键词: 多智能体系统; 有限时间; 一致性; 收敛速度

中图分类号: TP11

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2018)05-0011-04

Finite-time Average Consensus Protocol for Multi-agent Systems with a Fast Convergence Rate

WANG Xiao-bo¹, XING Jian-chun¹, LI Jue-long^{1, 2}, WANG Rong-hao¹

(1 College of Defense Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing 21007, China;

2 Research Center of Costal Defense Engineering, Beijing 100841, China)

Abstract: A novel protocol that can achieve an average state consensus for multi-agent systems in finite time is presented in this paper. Based on the Lyapunov stability theory, it is proved that the system stability can be guaranteed. Moreover, the upper bound of convergence time is obtained. Through the study and comparison with the control input of the typical finite-time consensus protocol, it obtains that the protocol can improve the convergence rate effectively. Lastly, simulations are conducted to verify the effectiveness of the results.

Key words: multi-agent system; finite-time; consensus; convergence rate

1 引言

多智能体理论的应用研究开始于上世纪 80 年代中期, 近几年有明显增长的趋势. 尤其是近十多年来, 智能体和多智能体系统理论与技术频繁出现在大量应用系统的设计中. 对智能体及其系统的研究已成为人工智能学科的一个热点, 是人工智能学科的核心内容.

多智能体系统 (Multi-Agent System, MAS) 是由多个具备一定感知和通信能力的智能体组成的集合, 其通过智能体之间的相互通信和相应的分布式协议可以共同完成单个智能体所无法完成的复杂性、高难度的任务. MAS 理论和方法在机器人编队控制、无人机协调控制、分布式传感器网络等领域具

有重要的应用价值. MAS 协同控制是当前控制领域中的研究热点和研究前沿, 吸引了自动化领域专家和学者越来越多的关注, 其研究涵盖的基本问题主要包括: 一致性控制、群集控制、会合控制、编队控制, 其中又以一致性控制为其他几种控制的基础. MAS 一致性控制主要是研究如何基于 MAS 中个体之间有限的信息交换来设计算法, 使得所有智能体的某一个或是所有状态量趋于相等.

MAS 协同控制问题源于 Vicsek 等^[1]提出的一个简单的粒子模型, 作者给出了一系列有趣的仿真结果. 每个粒子利用它的邻居运动方向之和的平均值来更新自己的运动方向动态, 在没有集中的协调控制下, 所采用的“邻居规则”却能够使所有粒子最终朝同一个方向运动. 基于 Fax 和 Murray 的早期

工作^[2], Olfati-Saber 等^[3]系统地提出了多智能体一致性问题的理论框架, 给出了一致性控制协议的基本形式, 并结合图论等概念, 给出的 MAS 达到渐进平均一致的充要条件. 更多关于 MAS 一致性问题的研究成果可参考文献^[4,5].

有限时间稳定性的概念由 Bhat 和 Bernstein 提出^[6], 随后被研究人员引入到 MAS 领域.

Wang L 和 Feng X^[7]提出了两种连续的有限时间一致性协议, 并得出了实现多智能体有限时间一致性的条件. Zuo Z 和 Lin T^[8]提出了一种新的一致性协议, 同时证明了在这种协议下系统收敛时间的上限和初始状态无关. Wang L 和 Chen Z^[9]等研究了具有时延的多智能体有限时间一致性问题. Shang^[10]对有限时间一致性问题进行研究, 并得出了 MAS 实现有限时间一致性的必要条件.

然而以上协议尽管均能实现有限时间一致性收敛, 但其收敛速度较慢. 基于此, 本文提出了一种新型的有限时间一致性协议, 通过证明得出了该协议可以实现 MAS 有限时间平均一致性, 并得出了系统收敛时间的上限. 通过对系统的控制输入进行分析, 得出该协议可以有效提高系统的收敛速度.

符号标注: $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $1 = [1, 1, \dots, 1]^T$ 其维数为 n , $\text{span}\{1\} = \{\epsilon \in R^n: \epsilon = r_1, r \in R\}$. 对于任意 $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_p$ 表示向量的 p 范数, $|||$ 表示实数的绝对值.

2 预备知识及问题描述

2.1 代数图论

通常, 各智能体之间的通讯拓扑可以用图进行描述. 令 $G = \{V, E, A\}$ 表示一个拓扑图, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示其节点的集合, n 为图中节点个数, 节点的下标集合为 I_n ; $E \subseteq V \times V$ 表示边的集合, $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 表示图的边; 邻接矩阵 $A = [a_{ij}]$, 其中 a_{ij} 为非负实数, 表示节点 i 到节点 j 的连接权重. 如果节点 i 可以接收到节点 j 的信息, 则 $a_{ij} > 0$; 否则, $a_{ij} = 0$, 本文假设相连节点之间连接权重均为 1. 假设拓扑图中每个节点没有自连, 即对于所有 $i \in I_n$, $a_{ii} = 0$. 如果一个拓扑图的邻接矩阵 A 是对称矩阵, 则称该拓扑图是无向的, 本文研究的对象均为无向拓扑图. 对于任意节点 v_i , 定义其邻居节点集为 $N_i(G, i) = \{v_j \in V: (v_i, v_j) \in E\}$. 如果对于两个节点 i, j , 存在下标集合 $\{k_1, k_2, \dots, k_l\}$ 满足 $a_{ik_1} > 0, a_{k_1 k_2} > 0, \dots, a_{k_l j} > 0$, 则称节点 i 到节点 j 之间存在一条有向信息传输路径. 对于一个无向图, 如果

图中任意两个节点都存在至少一条有向连接路径, 则称该图 G 是连通的.

一个图的 Laplacian 矩阵定义为 $L = [l_{ij}] \in R^{n \times n}$. 其中当 $i = j$ 时, $l_{ij} = \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik}$; 当 $i \neq j$ 时, $l_{ij} = -a_{ij}$. 对于一个无向连通图的 Laplacian 矩阵具有如下的性质: (1) 0 是矩阵 L 的一个特征值, 1 是其相应的特征向量; (2) 对任意向量 $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]^T$, $\epsilon^T L \epsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\epsilon_j - \epsilon_i)^2$ 成立, 其说明矩阵 L 所有特征根都是非负实数; 矩阵 L 第二最小特征根 $\lambda_2(L) > 0$, 其又被称作该拓扑图的代数连接度, 且 $\lambda_2(L) = \min_{\epsilon \neq 0, 1^T \epsilon = 0} \frac{\epsilon^T L \epsilon}{\epsilon^T \epsilon}$. 因此, 如果 $1^T \epsilon = 0$, 则有 $\epsilon^T L \epsilon \geq \lambda_2(L) \epsilon^T \epsilon$. 更多关于图论的研究成果可参考文献^[11].

2.2 预备知识

引理 1^[12]: 如果 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \geq 0, 0 < p \leq 1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n \xi_i^p \leq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^p \quad (1)$$

2.3 问题描述

假设 MAS 由 n 个智能体组成, x_i 表示第 i 个智能体的状态, 其中 $i \in I_n$, 令 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. 假设每个智能体均满足动力学方程:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) \quad (2)$$

式中, u_i 为 MAS 一致性协议.

MAS 在任意初始状态条件下, 如果存在稳定的平衡点 x^* 和时间 t^* , 当 $t \geq t^*$ 时, 所有 $i \in I_n$ 满足 $x_i = x^*$, 此时称 MAS 实现了有限时间一致性, 且 t^* 称为系统的收敛时间, 如果 $x^* = \sum_{i=1}^n x_i(0)/n$, 此时 MAS 实现了有限时间平均一致性.

本文所提出的快速有限时间平均一致性协议为:

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - x_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i) |x_j - x_i|^\alpha \quad (3)$$

式中, $0 < \alpha < 1$, $\text{sign}(x)$ 为符号函数, 其表达式为:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

3 稳定性及性能分析

定理 1: 假设 MAS 为无向连通的, 那么协议(3)

可以实现系统的有限时间平均一致性.

证明:因为系统为无向连通的,因此可以得到:

$$\sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) = 0 \quad (5)$$

令:

$$\kappa = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (6)$$

由等式(5)可以得出 κ 是一个常数.

令 $\delta(t) = [\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t)]^T$ 且 $x_i(t) = \kappa + \delta_i(t)$, 因此得出:

$$\dot{\delta}_i(t) = \dot{x}_i(t) \quad (7)$$

继而得出:

$$\begin{aligned} 1^T \delta(t) &= \sum_{i=1}^n x_i(t) - n\kappa \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(t) - \sum_{i=1}^n x_i(t) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

选取 Lyapunov 函数为:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i^2(t) \quad (9)$$

当 $V(t) > 0$ 时,对 t 求导可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \delta_i \dot{\delta}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_i (a_{ij} \sum_{j=1}^n (\delta_j - \delta_i) + a_{ij} \sum_{j=1}^n \text{sign}(\delta_j - \delta_i) |\delta_j - \delta_i|^\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \delta_i (\delta_j - \delta_i) + a_{ij} \delta_j (\delta_i - \delta_j) + \\ &\quad a_{ij} \delta_i \text{sign}(\delta_j - \delta_i) |\delta_j - \delta_i|^\alpha + \\ &\quad a_{ij} \delta_j \text{sign}(\delta_i - \delta_j) |\delta_i - \delta_j|^\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} (\delta_i - \delta_j) \text{sign}(\delta_j - \delta_i) |\delta_j - \delta_i|^\alpha - \\ &\quad a_{ij} (\delta_i - \delta_j)^2) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} |\delta_j - \delta_i|^{1+\alpha} - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_i - \delta_j)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_i - \delta_j)^2 - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij})^{\frac{2}{1+\alpha}} (\delta_j - \delta_i)^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

令:

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_i - \delta_j)^2 \\ H_2 &= \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij})^{2/(1+\alpha)} (\delta_j - \delta_i)^2)^{(1+\alpha)/2} \end{aligned} \quad (11)$$

则:

$$H_1 = -\frac{1}{4} \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\delta_j - \delta_i)^2}{\sum_{i=1}^n \delta_i^2} V(t)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \frac{\delta^T L_A \delta}{\sum_{i=1}^n \delta_i^2} V(t) \\ &= -\frac{2\delta^T L_A \delta}{\delta^T \delta} V(t) \\ &\leq -2\lambda_2(L_A) V(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} H_2 &\leq -\frac{1}{2} (\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^{2/(1+\alpha)} (\delta_j - \delta_i)^2)^{(1+\alpha)/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^{2/(1+\alpha)} (\delta_j - \delta_i)^2}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i^2} V(t) \right]^{(1+\alpha)/2} \end{aligned} \quad (13)$$

设 $B = [b_{ij}] \in R^{n \times n}$, 其中 $b_{ij} = (a_{ij})^{2/(1+\alpha)}$. 因为相连节点之间连接权重均为 1, 可以得出 $B = A$. 则:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^{2/(1+\alpha)} (\delta_j - \delta_i)^2 &= 2\delta^T L_B \delta \quad (14) \\ \frac{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^{\frac{2}{1+\alpha}} (\delta_j - \delta_i)^2}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i^2} &= \frac{4\delta^T L_B \delta}{\delta^T \delta} \geq 4\lambda_2(L_B) \end{aligned} \quad (15)$$

综合以上公式,可以得出:

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -2\lambda_2(L_A) V(t) - \frac{1}{2} (4\lambda_2(L_B))^{\frac{1+\alpha}{2}} V(t)^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (16)$$

令 $p = 2\lambda_2(L_A)$, $q = \frac{1}{2} (4\lambda_2(L_B))^{\frac{1+\alpha}{2}}$, 则:

$$\int \frac{dV(t)}{pV(t) + qV(t)^{(1+\alpha)/2}} = - \int dt \quad (17)$$

$$\frac{2}{p(1-\alpha)} \ln \frac{pV(t)^{(1-\alpha)/2} + q}{q} = -t + C \quad (18)$$

当 $t = 0$ 时, $V(t) = V(0)$, 因此可以得出:

$$C = \frac{2}{p(1-\alpha)} \ln \frac{pV(0)^{(1-\alpha)/2} + q}{q} \quad (19)$$

代入 C , 令 $V(t) = 0$, 则 $u_i = 0$, 系统实现平均一致性收敛, 同时可得到系统收敛时间的上限为:

$$t = \frac{2}{p(1-\alpha)} \ln \frac{pV(0)^{(1-\alpha)/2} + q}{q} \quad (20)$$

综上所述,定理 1 结论成立.

通过文献[7]可知,典型的有限时间一致性协议为:

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i) |x_j - x_i|^\alpha \quad (21)$$

为了体现本文提出协议的快速性,本文提出的协议和典型有限时间一致性协议的 2 倍输入进行对比,以抵消典型协议的控制输入(即收敛速度),即:

$$u_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i) |x_j - x_i|^\alpha \quad (22)$$

这样,本文的协议和典型有限时间一致性协议

不同之处在于,运行一个线性项替代了典型协议的一个非线性项. 因为 $0 < \alpha < 1$, 线性项的存在使得系统的 u_i 较相同条件下典型的协议有了较大幅度的提高. 因此,本文提出的协议可以有效得提高系统的收敛速度.

4 仿真分析

为验证协议的有效性和快速性,利用 Matlab 2014a 对协议进行仿真分析. 假设 MAS 包含 4 个智能体,其在笛卡尔坐标系下初始坐标分别为 $(-20, 40); (30, 20); (20, -20); (-40, -40)$,其拓扑结构如图 1 所示. 设 $\alpha=0.5$.

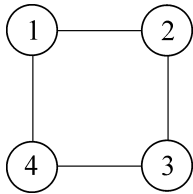
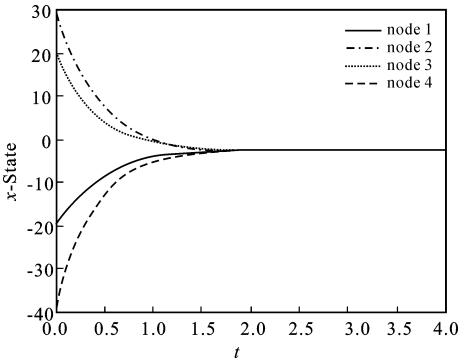
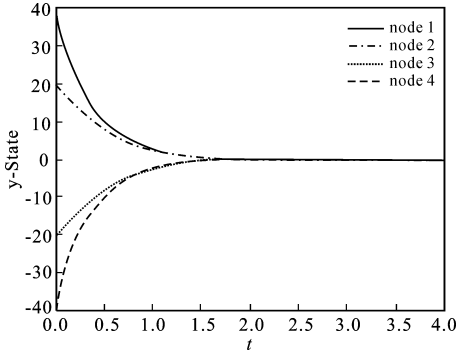


图 1 多智能体系统拓扑结构图

则在协议(3)控制下多智能体 x, y 方向的状态随时间大小变化分别如图 2(a)、(b)所示;另外,多智能体运行轨迹图如图 3 所示. 综上可以看出 MAS 可以实现有限时间平均一致性.



(a)多智能体 x 方向状态随时间大小变化



(b)多智能体 y 方向状态随时间大小变化

图 2 多智能体系统状态随时间变化图

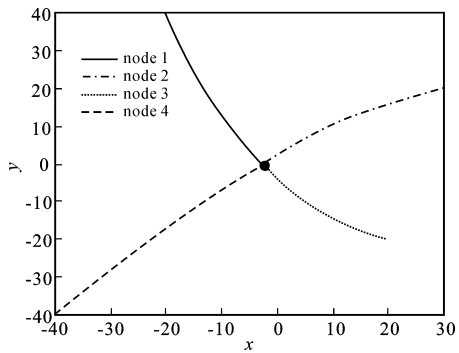


图 3 多智能体系统运行轨迹图

最后,对在协议(3)以及协议(22)控制下,MAS 的收敛速度大小随时间的变化图分别如图 4、图 5 所示,通过仿真图可以明显地看出系统在协议(3)控制下,收敛速度有了大幅度的提高,收敛时间有了大幅度的缩短,因此验证了本文提出的协议可以有效提高系统收敛速度的结论.

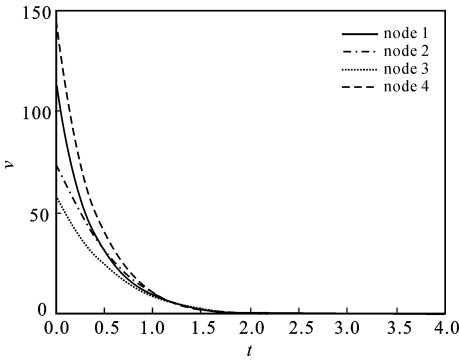


图 4 协议(3)控制下系统收敛速度随时间变化图

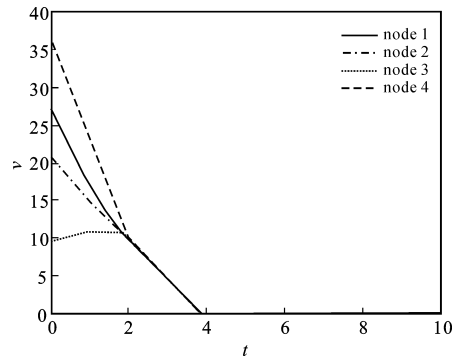


图 5 协议(22)控制下系统收敛速度随时间变化图

5 结束语

本文提出了一种新型的有限时间平均一致性协议. 通过引入 Lyapunov 函数,证明了系统在此协议下的稳定性,并得出了系统收敛时间的上限. 通过对

(下转第 20 页)

(ICACCD). Jaipur, 2016:2576-2581.

- [8] Tang T A, Mhamdi L, McLernon D, et al. Deep learning approach for network intrusion detection in software defined networking[C]// 2016 International Conference on Wireless Networks and Mobile Communications (WINCOM). Marrakesh, Morocco, 2016: 258-263.

(上接第 14 页)

系统收敛速度的分析,并结合 Matlab 仿真,得出新型协议可以有效提高系统的收敛速度.

参考文献:

- [1] Vicsek T, Czirok T. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [2] Fax J, Murray R. Information flow and cooperative control of vehicle formations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [3] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [4] Ren W, Beard R W, Atkins E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination[C]// American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005. USA, IEEE, 2005: 1859-1864.
- [5] Cao Y, Yu W, Ren W, et al. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2013, 9(1): 427-438.
- [6] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems [J]. SIAM Journal on

作者简介:

马乐乐 女, (1994-), 硕士研究生. 研究方向为软件定义网络. E-mail: 1790879656@qq.com.

束永安 男, (1964-), 博士, 教授. 研究方向为无线网络、软件定义网络.

Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.

- [7] Wang L, Feng X. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 55(4): 950-955.
- [8] Zuo Z, Lin T. A new class of finite time nonlinear consensus protocols for multiagent systems [J]. International Journal of Control, 2014, 87(2): 363-370.
- [9] Wang L, Chen Z, Liu Z, et al. Finite time agreement protocol design of multiagent systems with communication delays [J]. Asian Journal of Control, 2009, 11(3): 281-286.
- [10] Yilun Shang. Finitetime consensus for multiagent systems with fixed topologies[J]. International Journal of Systems Science, 2009, 43(3): 499-506.
- [11] Godsil C, Royle G F. Algebraic graph theory [M]. New York ; Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] Miller R K, Michel A N. Ordinary differential equations [M]. USA, Salt Lake City : Academic Press, 1982.

作者简介:

王晓波 男, (1988-), 博士研究生. 研究方向为多智能体系统一致性研究. E-mail: xbwang1988@163.com.

邢建春 男, (1964-), 博士, 教授. 研究方向为国防工程内部设备及智能化.